

АНАЛИЗ СЛОЖНЫХ ОСОБЫХ ТОЧЕК ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОМОЩЬЮ МНОГОУГОЛЬНИКА НЬЮТОНА

Ф.С.Березовская, А.М.Молчанов

Институт биологической физики АН СССР, Пущино-на-Оке

При исследовании математических моделей биологических процессов часто возникает необходимость изучения сложных особых точек дифференциальных уравнений, в окрестности которых линейное приближение к системе будет нулевым. Эта задача сводится к нахождению ветвей неявной функции $F(x,y)$ в окрестности точки ветвления ($\text{grad}(F(x,y)) = 0$). При изучении подобных вопросов оказываются полезными следующие две идеи:

1. Отыскание системы координат, в которой задача сводится к невырожденной, т.е. сложная точка распадается на несколько простых. 2. Использование многоугольника Ньютона для выбора главных в окрестности точки членов уравнения и построения соответствующей системы координат.

Пусть в системе координат (x,y) кривые в окрестности особой точки $(0,0)$ имеют вид пучка $y = u_k x^\alpha + o(x^\alpha)$. Строится система координат (u,x) , где по оси u откладывают тангенсы углов наклонов прямых $y = u_k x^{1/\alpha}$ с осью Ox . Если через особую точку проходят решения

$$y_1 = u_1 x^{\alpha_1} + o(x^{\alpha_1}), \quad y_2 = u_2 x^{\alpha_2} + o(x^{\alpha_2}), \dots,$$

то надо последовательно выделить пучки с разной степенью касания, а потом разделить кривые пучка.

Итак, стоит вопрос об отыскании замены переменных

$$y = ux^\alpha, \quad x = x. \quad (1)$$

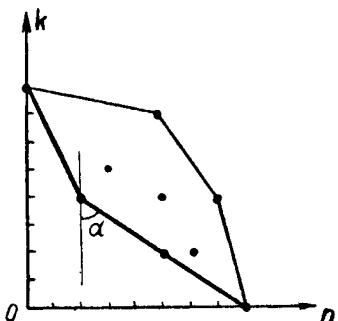
Построить (1), т.е. найти соответствующие α , дает возможность многоугольник Ньютона.

1. Пусть требуется найти однозначные решения $y = f(x)$ уравнения

$$F(x, y) = 0 \quad (2)$$

в окрестности особой точки $(0, 0)$. $F(x, y)$ — неявная дифференцируемая функция. Уравнение (2) не имеет решений $x = 0, y = 0$.

В прямоугольной системе координат (n, k) на координатную плоскость износятся точки (s, m) , если $F_{x,y} \Big|_{(0,0)} \neq 0$,



(s и m — натуральные). Выпуклая линейная оболочка, натянутая на множество этих точек, является многоугольником Ньютона уравнения (2). Допустимой частью многоугольника будет часть оболочки, видимая из точки $O(0,0)$ (На

рисунке слева показан многоугольник Ньютона, допустимая часть которого выделена жирными линиями).

Показано, что α_i , равное степени касания решений, проходящих через особую точку, будет совпадать с тангенсом угла наклона i -й допустимой грани с отрицательным направлением оси On . Построенная таким образом замена (1) приводит урав-

нение (2) к виду $F(x, ux^{\alpha_i}) = x^\tau [g(u) + \phi(x, u)] = 0$, где $\tau > 0$, $\phi(x, u) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$. Причем, вообще говоря, $G_u|_{x=0} = g_u \neq 0$.

Для нахождения однозначных решений $y = f(x)$ уравнения (2) в окрестности $(0, 0)$ с любой степенью точности, можно использовать рекуррентную формулу

$$y_{n+1,i} = u_{n+1,i} x^{\frac{\alpha_i}{\tau}},$$

где $u_{0,i}$ — решение уравнения $g(u) = 0$.

Функцию $u_{n+1,i}(x)$ — можно получить с помощью итераций из уравнения $g(u) + \phi(x, u) = 0$, например, методом Ньютона (начальное приближение $u_{0,i}$).

2. Для исследования характера сложных особых точек дифференциальных уравнений, имеющих иулевое линейное приближение, можно найти систему координат, в которой сложная точка распадается на несколько простых. Залишем систему

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y), \quad (3)$$

где P, Q — дифференциальные функции, в эквивалентном виде

$$\frac{dy}{dx} = P(x, y)/Q(x, y). \quad (4)$$

Как и прежде, считаем точку $(0, 0)$ изолированной особой точкой уравнения (4). Если решение этого уравнения, проходящее через точку $(0, 0)$, имеет вид $y = Cx^\alpha + o(x^\alpha)$ ($C = \text{const}$), то $\frac{dy}{dx} \approx \alpha C x^{\alpha-1} = \alpha y/x$ и $\frac{dy}{dx}$ можно приближенно заменить на y/x . Тогда (4) примет вид

$$\Phi(x, y) \equiv Q(x, y)y - P(x, y)x = 0.$$

Для $\Phi(x,y)$ построение многоугольника Ньютона и определение допустимых граней делается, как и для (2). После замены (1) уравнение (4) представляется в виде $x^v du/dx = f(u) + \phi(x,u)$, где при $\phi(x,u) \rightarrow 0$, $x \rightarrow 0$; $v > 0$. Определив характер особых точек уравнения $x^v du/dx = f(u)$, легко установить характер особой точки уравнения (4).

Таким образом, исходная сложная особая точка расщепляется на несколько простых особых точек $(0, u_k)$, где u_k — корни уравнения $f(u) = 0$.

3. С помощью метода многоугольника Ньютона проведено исследование характера сложной особой точки $(\infty, 0)$ модели, описывающей кинетику узлового участка гликолитической системы ферментов:

$$\dot{x} = \alpha - xy^2, \quad \dot{y} = xy^2 - y.$$

Получили, что она является седло-узлом. Метод позволяет найти систему координат, в которой седло-узел расщепляется на седло и узел.

THE ANALYSIS OF COMPLEX PARTICULAR POINTS OF THE SECOND ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS BY NEWTON POLYGON METHOD

F.S.Berezovskaya, A.M.Molchanov

Institute of Biophysics, Acad. Sci. USSR, Puschino on Oka

The problem is reduced to finding out the branches of an implicit function at the branch point. The coordinate system where a complex point splits to a number of simple ones is determined. The Newton polygon method is employed.